2. Sequências monótonas e limitadas

2.1 Definições e exemplos

Definição 2.1.1 Uma sequência $\{x_n\}$ é dita *crescente* se $x_n \leq x_{n+1}$, para $n \geq 1$ (ou seja $x_1 \leq x_2 \leq \ldots x_n \leq \ldots$) e é dita *decrescente* se $x_n \geq x_{n+1}$, para $n \geq 1$ (ou seja $x_1 \geq x_2 \geq \ldots x_n \geq \ldots$). Uma sequência $\{x_n\}$ é *monótona* se for crescente ou decrescente.

■ **Exemplo 2.1** Uma sequência:

$$x_n = \frac{1}{(n+1)\cdot n}$$

é decrescente desde que $x_n = \dfrac{1}{(n+1)n} > \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{n+2} = x_{n+1}$, para todos $n \leq 1$.

■ **Exemplo 2.2** Sejam $x_1 = 0,31$, $x_2 = 0,3131$, $x_3 = 0,313131$, $\ldots$, $x_n = x_{n-1} + \dfrac{31}{100^n}$. É fácil ver que $\{x_n\}$ é crescente.

Definição 2.1.2 Uma sequência $\{x_n\}$ é *limitada superiormente* (LS) se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$, $n \geq 1$ e é *limitada inferiormente* (LI) se existir $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x_n$, $n \geq 1$. Se $\{x_n\}$ é (LS) e (LI) simultaneamente, ela chama-se *limitada*.

■ **Exemplo 2.3**
- $x_n = \text{sen}(\frac{\pi}{2}n)$ é limitada, não monótona, e divergente;
- $x_n = n!$ não limitada, monótona (crescente), e divergente;
- $x_n = 1 + \dfrac{1}{n} > 1 + \dfrac{1}{n+1} = x_{n+1}$. Assim $\{x_n\}$ é decrescente:

$$x_1 = 2 > x_2 > \ldots > x_n > 0.$$

É fácil ver que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, portanto $\{x_n\}$ converge.

Teorema 2.1.1 — da sequência monótona e limitada. Toda sequência $\{x_n\}$ limitada e monótona é convergente. Em particular, se $\{x_n\}$ for monótona mas não for limitada, $\{x_n\}$ diverge para $+\infty$ ou $-\infty$.

■ **Exemplo 2.4** Estude a convergência da $\{x_n\}$, onde

$$x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 6).$$

Solução. Mostremos que $\{x_n\}$ cresce usando o principio da indução finita. Temos $x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{1}{2}(2+6) = 4$. Logo $x_2 > x_1$. Suponha que $x_n > x_{n-1}$. Mostremos que $x_{n+1} > x_n$. Como $x_n > x_{n-1}$, assim $x_n + 6 > x_{n-1} + 6$, e $\frac{1}{2}(x_n+6) > \frac{1}{2}(x_{n-1}+6)$. Portanto $x_{n+1} > x_n$.

Agora mostremos que $\{x_n\}$ é limitada. Temos

$$2 = x_1 < x_2 < \dots$$

Mostremos que $x_n < 6$ usando o principio de indução finita. Claramente $x_1 < 6$. Suponha que $x_n < 6$. Assim

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n+6) < \frac{1}{2}(6+6) = 6.$$

Portanto $2 < x_n < 6$ para todo $n \geq 1$. Pelo Teorema 2.1.1, existe $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Como $x_n \to L$ e $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n+6) \to L$, obtemos

$$L = \frac{1}{2}(L+6),$$

ou seja $L = 6$. ;-)

■ **Exemplo 2.5** Estude a convergência da sequência $\{s_n\}$, onde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Solução. Como $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1}$, obtemos $s_{n+1} > s_n$ para todo $n \geq 1$. Ou seja $\{s_n\}$ é crescente. É fácil ver que (veja a Figura 2.1)

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x|_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

A sequência $\{\ln(n+1)\}$ não é limitada, logo $\{s_n\}$ não é limitada. Pelo Teorema 2.1.1, $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. ;-)

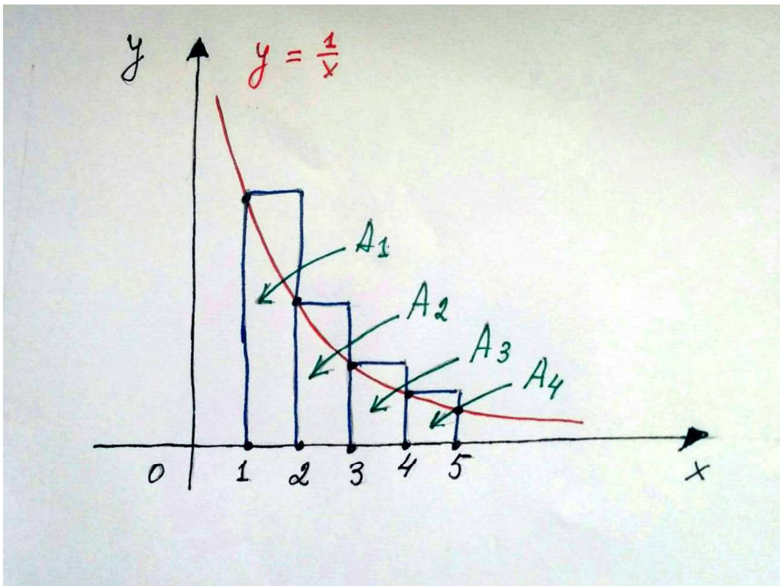

Figure 2.1: Série harmônica

■ **Exemplo 2.6** É fácil ver que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1$.

Pergunta natural é como calcular $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$? Neste caso temos que a sequência $\{x_n\}$, com $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada. A existência do limite foi provada pelo J. Bernoulli (1655–1705).

Definição 2.1.3

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718...$$

é o número irracional chamado *número de Euler*.

Teorema 2.1.2 Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $a \in D$. Seja $\{x_n\} \subset D$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Então

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a).$$

■ **Exemplo 2.7** 1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}}=\{2n=k\}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}=\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{\frac{1}{2}}\stackrel{*}{=}e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e},$$

onde $\stackrel{*}{=}$ significa o uso do Teorema 2.1.2 com $f=x^{\frac{1}{2}}$.

2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1}{7n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n(1+\frac{1}{5n})}{7n(1+\frac{1}{7n})}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{5n})^n}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{7n})^n}=0\cdot\frac{e^{\frac{1}{5}}}{e^{\frac{1}{7}}}.$$

De fato,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n=\{5n=k\}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{5}}=\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{1}{5}}.$$

2.2 Séries numéricas

Definição 2.2.1 1) Seja sequência $\{x_n\}$. A some infinita

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$$

chama-se uma *série*.

2) A soma $s_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$ chama-se *soma parcial*.

3) Se $\{s_n\}$ converge e $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=S\in\mathbb{R}$, série $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}s_n=S.$$

■ **Exemplo 2.8** 1) Temos que

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}bt^k=bt\cdot\frac{1-t^n}{1-t},\quad t>0.$$

Observe que s_n converge para $0<t<1$ e

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}bt^k=\frac{bt}{1-t}=\sum_{n=1}^{\infty}bt^n.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}bt^n$ é dita **série geométrica**!

2) Consideremos

$$x = 0,313131... = \frac{31}{100} + \frac{31}{100^2} + \cdots + \frac{31}{100^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{31}{100^n}.$$

x é série geométrica com $b = 31$, $t = \dfrac{1}{100}$. Neste caso $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{31}{100^k}$ é soma parcial. Temos

$$x = 0,3131... = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{31}{100^k} = \frac{31 \cdot \frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{31}{99}.$$

■ **Exemplo 2.9** Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

Neste caso

$$s_1 = -1,$$
$$s_2 = -1 + 1 = 0,$$
$$s_3 = -1 + 1 - 1 = -1,$$
$$s_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0.$$

Logo $s_{2k-1} = -1$ e $s_{2k} = 0$. Portanto s_n não converge.

Teorema 2.2.1 — Critério do termo geral. Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstração. Seja $s_n = x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n$ e $s_{n-1} = x_1 + \cdots + x_{n-1}$. Logo $x_n = s_n - s_{n-1}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, então $\{s_n\}$ converge e $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0.$$

■

Corolario 2.2.2 Se $\{x_n\}$ diverge ou $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

Obs O fato que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ não implica que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge (!). Por exemplo, consideremos $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Lembre que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge. Mas $\dfrac{1}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ chama-se *série harmônica*.

■ **Exemplo 2.10** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{7n+11}$ diverge desde que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{7n+11} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{5}{n}}{7+\frac{11}{n}} = \frac{4}{7} \neq 0.$$

2.3 Propriedades das séries

Usando as propriedades dos limites das sequências, podemos mostrar as seguintes propriedades das séries.

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ séries convergentes, então

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.
2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
3) $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Obs Observe que, as propriedades do produto e fração não são verdadeiras para as séries, ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n \cdot y_n) \neq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} x_n}{\sum_{n=1}^{\infty} y_n}.$$

Por exemplo, sejam $x_n = \frac{1}{2^n}$ e $y_n = \frac{1}{3^n}$. Assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5} \neq 1 \cdot \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty \neq 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} x_n}{\sum_{n=1}^{\infty} y_n}.$$

■ **Exemplo 2.11** Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{3}{4^n}\right)$.

Solução. Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} = \frac{3 \cdot \frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1.$$

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}).$$

Neste caso

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Pela propriedade da soma 1),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{3}{4^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n} = 1 + 1 = 2.$$

;-)